



TITLE:

1. 反磁性ケプラー運動における回帰性軌道(recurrent orbit)の量子化 (基研短期研究会報告「非可積分系の量子力学」,研究会報告)

AUTHOR(S):

桑田, 雅泰; 長谷川, 洋; Davis, Peter

CITATION:

桑田, 雅泰 ...[et al]. 1. 反磁性ケプラー運動における回帰性軌道(recurrent orbit)の量子化
(基研短期研究会報告「非可積分系の量子力学」,研究会報告). 物性研究 1988, 49(5): 453-462

ISSUE DATE:

1988-02-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92943>

RIGHT:

17. 長距離相関をもつランダム場中の電子状態 早大・理工 胡桃薫, 首藤啓, 相沢洋二
新潟大・工 合田正毅
18. Evolution from pure states into mixed states in de Sitter Space
京大・基研 阪上雅昭
19. 量子カオスの動的擾動活性 京大・理 足立聡, 戸田幹人, 京大・基研 池田研介

1. 反磁性ケプラー運動における回帰性軌道 (recurrent orbit) の量子化

京大・理 桑田雅泰, 長谷川洋
A T R Peter Davis

要 旨

最近の磁場中水素原子に対する光吸収実験¹⁾によれば, イオン化しきい値附近に数値の準ランダウ共鳴線が認められ, これは磁場方向 (z -) 軸を切る回数によって分類される周期的軌道・量子準位への光励起である。これに関する簡単なモデルは, 2自由度非分離ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} (p_\rho^2 + p_z^2) + \frac{r^2}{8} \rho^2 - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

の適当な近似 ($\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \simeq \frac{1}{|z|}$) である調和振動子と1次元ケプラー運動とのなす2次元周期運動として理解される²⁾。(これらの軌道は $\mathbf{r} = 0$ から出発し $|\mathbf{r}| \sim 10^2 a_B$ の軌道を書いて再び $\mathbf{r} = 0$ に回帰するという意味で recurrent 軌道と名付けられている) この事実は典型的な量子カオスである反磁性ケプラー運動のイオン化近傍不規則準位中に周期軌道による規則性が含まれていることを示している。この規則性が Runge-Lenz ベクトルの z -成分 $A_z = \text{const.}$ として表される可能性を示し, これに基く量子化のモデルを議論する。

§ 1 実験事実

一様磁場中でのリドバーク原子エネルギースペクトルは, 以前から知られている。それによれば, エネルギースペクトルはイオン化エネルギー附近ではほぼ等間隔にならび, サイクロトロ

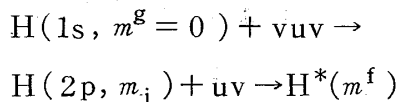
ン振動数を ω_c として

$$\Delta E = \frac{3}{2} \hbar \omega_c \quad (1)$$

であり、準ランダウ共鳴 (Garton-Tomkins line) と呼ばれている³⁾ 最近なされた磁場中での水素原子の実験¹⁾ によっても、この準ランダウ共鳴は確認されている。準ランダウ共鳴は電子が磁場に垂直な $z = 0$ 平面内で運動するとして説明づけられる。

しかしながら、水素原子による実験ではこれ以外の共鳴が存在していることが示された。この共鳴は励起された電子が $z = 0$ 平面内ではなく、3次元的な運動をするためであることが明瞭となってきた。実験では、水素原子はレーザーにより2段階に励起された。

即ち、



この時、得られたスペクトルを図1(a)に示す。このスペクトルは磁気量子数 $m^f = 0$ 、磁場の強さ $B = 5.96 \text{ T}$ 、分解能 $\sim 1.5 \text{ GHz}$ のもとで得られたものである。図1(a)よりわかるように、スペクトルはカオス的であり、準ランダウ共鳴や規則性がないように見える。しかしスペクトルをフーリエ変換して時間領域で見ると、共鳴がはっきりとわかる。フーリエ変換された時間領域でのスペクトルは図1(b)に示してある。時間はサイクロトロン周期 $T_c = 2\pi/\omega_c = 6.0 \times 10^{-12} \text{ s}$ で規格化してあり、顕著な共鳴には、実線の丸印と星印が付けられている。

図1(b)を見ると③と④、④と⑤の時間々隔はどちらもほぼサイクロトロン周期 T_c である。即ち、

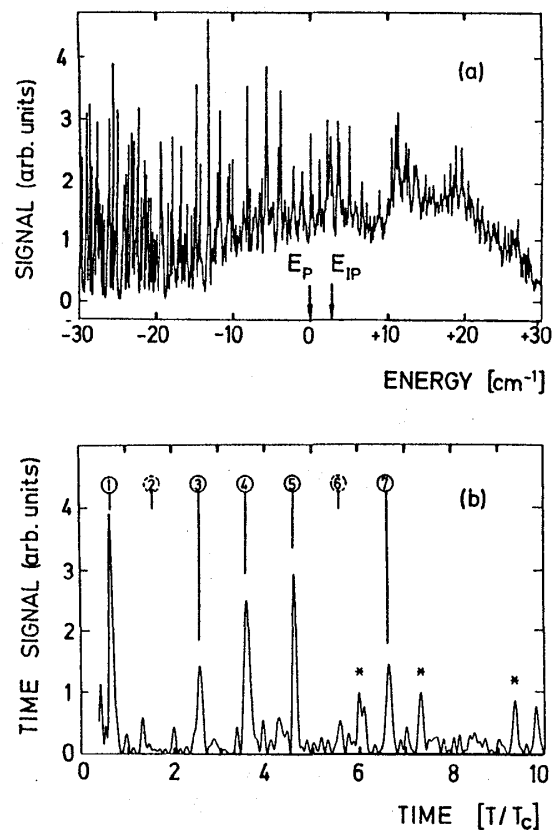


図1(a) $B = 5.96 \text{ T}$ における水素原子の励起・イオン化スペクトル。 E_p : linear Zeeman shift, E_{IP} : Landau zero-point energy (b) エネルギースペクトル(a)を時間領域にフーリエ変換して得たスペクトル。(文献2)

$$T_4^{\text{ex}} - T_3^{\text{ex}} \simeq T_5^{\text{ex}} - T_4^{\text{ex}} \simeq T_c$$

である。この関係より時間領域では時間々隔がほぼ T_c で共鳴が起っているように見える。これから予測される共鳴の場所が破線の丸印で示されている。この等間隔で起っている共鳴を " ν -type" と呼ぶことにする。以下ではこの ν -type の共鳴のみを考える。これら共鳴のおこる時間 T_ν^{ex} を次のように現象論的に書き改める。即ち、

$$T_\nu^{\text{ex}} = (\nu - \delta_\nu^{\text{ex}}) T_c \quad (2)$$

ν は図 1(a) 中にある番号 1, 2, ..., であり、 δ_ν^{ex} はそれぞれの共鳴に対しての ν からの補正を表し、 $\delta_\nu^{\text{ex}} \approx 0.3 \sim 0.4$ である。この規則に従わない共鳴は図 1(b) 中に星印で示されている。関係式 $\Delta E = 2\pi\hbar/T$ を用いれば式(2)の時間領域で得られた共鳴は周波数領域で

$$\Delta \epsilon_\nu^{\text{ex}} = (\nu - \delta_\nu^{\text{ex}})^{-1} \hbar \omega_c \quad (3)$$

のように表される。 $\Delta \epsilon_\nu^{\text{ex}}$ はある ν -type の隣り合う共鳴エネルギー間隔を表している。 $\nu = 1$ はまさに Garton-Tomkins line である。

§ 2 Recurrent 軌道の近似的取り扱い

以下の議論は文献 1, 2 およびわれわれの補足的計算に基づいている。 ν -type の共鳴は

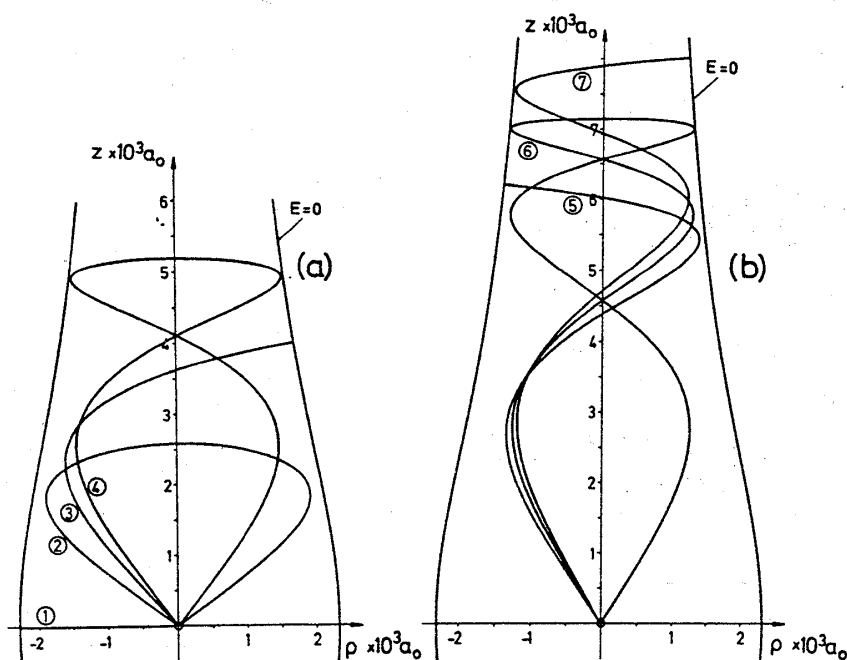


図 2 数値積分による $E=0$ での電子の recurrent 軌道 (文献 1)

電子の周期的古典軌道により説明される。系のハミルトニアンは円柱座標 (ρ, z, ϕ) を用いて

$$H = \frac{1}{2} (p_\rho^2 + L_z^2 / \rho^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} r L_z + \frac{1}{8} r^2 \rho^2 - (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$r = B / 2.35 \cdot 10^5 \text{ T (a.u.)}$$

で与えられる。角運動量 L_z は保存するから ϕ 方向の運動は分離する。 (ρ, z) の運動は上のハミルトニアンから得られる運動方程式を数値積分して求まる。電子の1つの閉軌道が時間領域の1つの共鳴に対応していると仮定する。電子は 2p 状態から励起されるので、 ρ と z との初期値を 0 として、原点から出発して原点にもどってくる閉軌道を探す。エネルギー E と最初の運動方向 θ は free parameter である。得られた解は最初の角度 $\theta(E)$ と周期 (原点までもどってくる時間) $T^{\text{th}}(E)$ で特徴づけられる。数値的に求まった軌道は一般に非周期的なもの、 z -方向と ρ -方向の周期比が有理数であるリサージュ図形的なものが含まれる。特に z -方向の一周期に対し ρ -方向の整数回の周期運動により原点に戻る軌道が recurrent 軌道であり、この軌道の $E = 0$ での周期が実験で得られた ν -type の共鳴時間と一致している。したがってこの recurrent 軌道が ν -type 共鳴に対応していると考えられる。 $E = 0$ での recurrent 軌道を図 2 に示す。

今、得られた ν -type の recurrent 軌道を Einstein, Brillouin, Keller の量子化条件に従って量子化し、これを用いてそれぞれの軌道に対する量子数 n 、エネルギー E 、磁場の強さ r の間の関係を求める。分離できない系に対する Einstein, Brillouin, Keller の量子化条件は、今の場合次のように与えられる。

$$\frac{1}{2\pi} \oint (p_\rho d\rho + p_z dz) = n \quad (5)$$

積分は古典閉軌道にそって行なう。ハミルトニアン(4)には次のようなスケール則が成り立っている。即ち、次のようにスケール変換すると

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= r^{2/3} \rho & \tilde{p}_\rho &= r^{-\frac{1}{3}} p_\rho \\ \tilde{z} &= r^{2/3} z & \tilde{p}_z &= r^{-\frac{1}{3}} p_z \\ \tilde{L}_z &= r^{\frac{1}{3}} L_z \end{aligned} \quad (6)$$

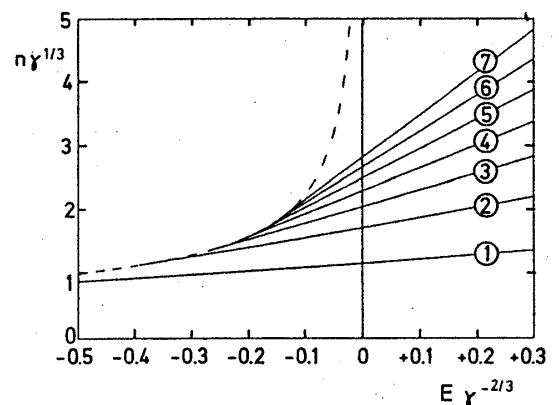


図 3 ν -type 軌道 $\nu = 1, \dots, 7$ に対する E B K 量子化の結果より得られる n , r , E の関係。波線は 1 次元ケプラー運動の作用—エネルギー関係式 $n_z = (-E_z)^{-\frac{1}{2}}$ を表す。

ハミルトニアン H は

$$H = r^{2/3} \tilde{H}$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (\tilde{p}_\rho^2 + \tilde{L}_z^2 / \tilde{\rho}^2 + \tilde{p}_z^2) + \frac{1}{2} \tilde{L}_z + \frac{1}{8} \tilde{\rho}^2 - (\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

となる。このスケール変換により式(5)は,

$$\frac{1}{2\pi} \oint (\tilde{p}_\rho d\tilde{\rho} + \tilde{p}_z d\tilde{z}) = n r^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

となり, 式(8)の左辺はスケール変換されたエネルギー $\tilde{E} = E r^{-\frac{2}{3}}$ だけに依存している。したがって(8)式はそれぞれの閉軌道に対して

$$n r^{\frac{1}{3}} = f(E r^{-\frac{2}{3}}) \quad (9)$$

と表現でき, n, E, r の関係が求まる。数値積分した結果は図3に示してある。

数値積分より求めた ν -type の recurrent 軌道は, ハミルトニアンを次のように近似することで近似的に求まる。即ち, (4)式のハミルトニアンで最後の項の ρ 依存性を落して,

$$H = \frac{1}{2} (p_\rho^2 + p_z^2) + \frac{1}{8} r^2 \rho^2 - \frac{1}{|z|} \quad (10)$$

とする。ただし, 角運動量 $L_z = 0$ とした。このハミルトニアンは調和振動子と一次元 Kepler 運動に分離する。従って,

$$H_\rho = \frac{1}{2} p_\rho^2 + \frac{1}{8} r^2 \rho^2 = E_\rho \quad (11)$$

$$H_z = \frac{1}{2} p_z^2 - \frac{1}{|z|} = E_z$$

を初期条件 $\rho(0) = z(0) = 0$ で解け

ばよく, その解は

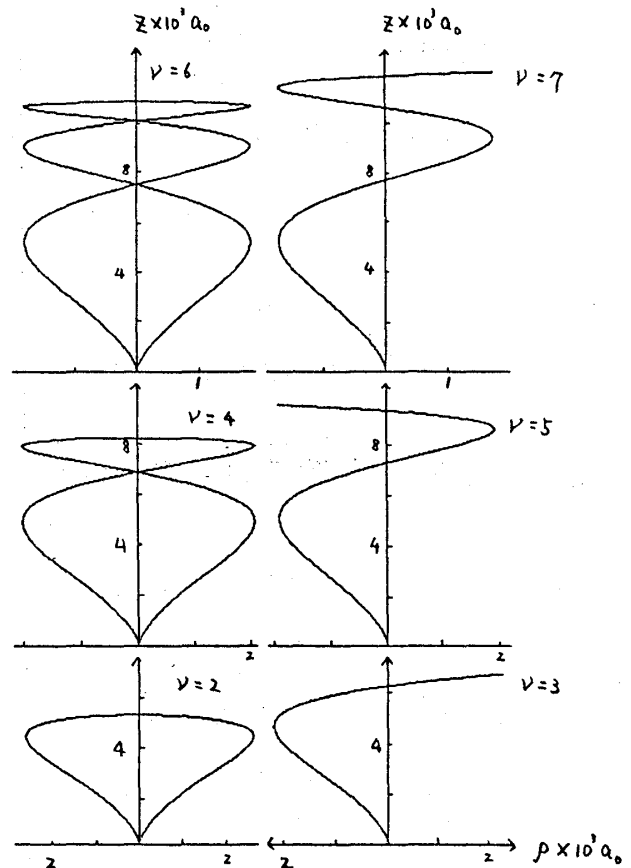


図4 ν -type 軌道に対する近似解によって求まる $E=0$ の軌道 (われわれによる計算結果)

$$\rho = \rho_0 \sin \left(\frac{r}{2} t \right)$$

(12)

$$z = z_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad t = \left(\frac{z_0}{2} \right)^{3/2} (\varphi - \sin \varphi)$$

ここで $\rho_0 = 2 \sqrt{2E_0}/r$, $z_0 = -1/E_z$ である。それぞれの運動に対する作用は今の場合

$$n_\rho \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\rho \geq 0} p_\rho d\rho = \frac{r}{8} \rho_0^2 = E_\rho / r$$

(13)

$$n_z \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{z \geq 0} p_z dz = \left(\frac{z_0}{2} \right)^{1/2} = (-2E_z)^{-1/2}$$

である。 ρ 方向の運動が $\rho = 0$ から出発して $\rho = 0$ にもどってくるまでの時間 T_ρ は

$$T_\rho = 2\pi/r = T_c \quad (14)$$

z 方向の運動が $z = 0$ から出発して $z = 0$ にもどってくるまでの時間 T_z は

$$T_z = 2\pi \left(\frac{z_0}{2} \right)^{1/2} = 2\pi n_z^3 \quad (15)$$

である。軌道が閉軌道であるためには、

$$l \cdot T_c = m \cdot T_z \quad l, m = 1, 2, \dots \quad (16)$$

であればよい。これらの閉軌道の中から ν -type の recurrent 軌道に対応するものは

$$T_z = \nu T_c = T_\rho \quad (\text{調和振動の全周期}) \quad (17)$$

となる軌道群である。(17)の関係は(14), (15)を用いて

$$n_z^3 = \nu/r \quad (18)$$

となる。(13), (18)を用いて(12)を書き改めると, ν -type の共鳴に対応する軌道は次のようになる。

$$\rho = \frac{2}{r} [2E + (\nu/r)^{2/3}]^{1/2} \sin \left(\frac{r}{2} t \right)$$

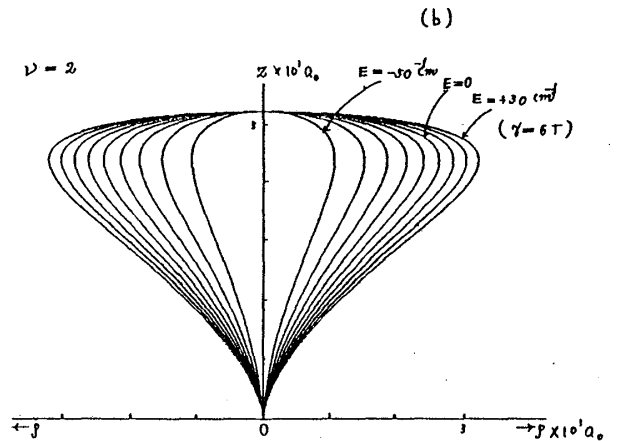
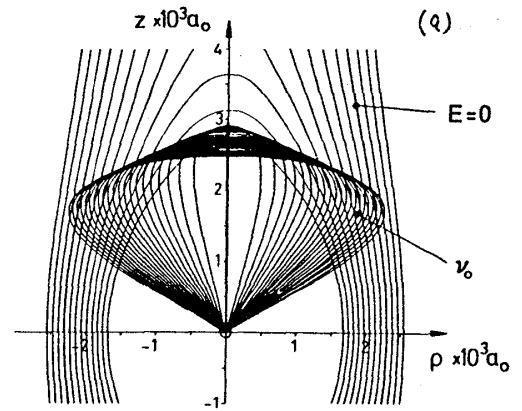


図5 (a) 数値積分によって得られた $\nu=2$ の軌道のエネルギー依存性。 ν_0 は $E=0$ の軌道でありエネルギーを 5 cm^{-1} づつかえた軌道が画かれている。(文献2)
(b) 近似解より求まる軌道のエネルギー依存性。エネルギーを 10 cm^{-1} づつかえた軌道が画かれている。(われわれの結果)

$$z = 2(\nu/r)^{2/3} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad t = \nu/r(\varphi - \sin \varphi) \quad (19)$$

$E = 0$ の時の $\nu = 2, 3, \dots, 7$ に対する軌道を図4に示す。また、図5は $\nu = 2$ の場合の異なるエネルギーに対する軌道群を数値積分に基くものと、上の近似によるものとの比較である。

ν -type の共鳴に対応する近似解の全作用 n は(13), (18)を用いて

$$\begin{aligned} n &= \nu n_\rho + n_z = \nu r^{-1} E_\rho + n_z \\ &= \nu r^{-1} E + \frac{\nu}{2 r n_z^2} + n_z = \nu r^{-1} E + \frac{3}{2} \left(\frac{\nu}{r} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (20)$$

となり、式(20)は E, r, n の関係を与えているが実際関係ではない。ハミルトニアン(4)で最後の項から ρ 依存性を落したので、 ρ 方向の周期は実際もっと短い。このことを現象論的に取り入れるために $T_\rho = (\nu - \delta_\nu) T_c$ とする。したがって式(20)で ν を $\nu - \delta_\nu$ でおきかえてやれば、 E, r, B の間の関係が analytic に求まり

$$n r^{1/3} = (\nu - \delta_\nu) E r^{-2/3} + \frac{3}{2} (\nu - \delta_\nu)^{-1/3} \quad (21)$$

または

$$\begin{aligned} n^2 E &= n^3 r / (\nu - \delta_\nu) \\ &\quad - \frac{3}{2} (n^3 r / (\nu - \delta_\nu))^{2/3} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。 δ_ν は関係式(21), (22)が実際関係(9)を最もよく表すように決められる。決定した値は表1に示してある。こうして求まった δ_ν は実験より得られた δ_ν^{ex} とほぼ一致する。式(22)から得られる $n^2 E$ と $n^3 r$ の関係と実際に正確な計算から得られた関係を図6に示す。

実線が正確な計算によるもので、点線は式(22)

より得る関係を示している。また(21)より得られるエネルギー間隔は

$$\Delta \epsilon_\nu = \frac{dE}{dn} = (\nu - \delta_\nu)^{-1} \hbar \omega_c \quad (21)$$

となり実験から得られるものと一致する。

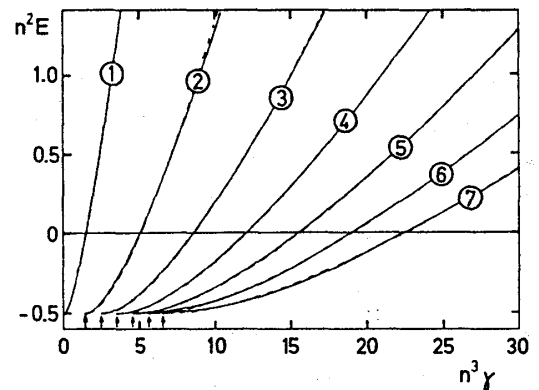


図6 $n^2 E$ と $n^3 r$ の関係：実線は実際の数値積分より求まったものであり、点線は、式(22)による関係を示している。
(文献2)

§ 3 倍周期‘欠損数’に対する一つのモデル

前節で示した recurrent 軌道への近似 ($\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \sim \frac{1}{|z|}$) から得られる ν -タイプ共鳴条件は

$$\begin{array}{ll} \text{I} & n r^{1/3} = \nu E r^{-2/3} + \frac{3}{2} \nu^{1/3} \\ \text{又は} & \\ \text{II} & n^2 E = \frac{n^3 r}{\nu} - \frac{3}{2} \left(\frac{n^3 r}{\nu} \right)^{2/3} \quad \nu = 1, 2, \dots \end{array}$$

であるが、実験を行った Bielefeld の人たちは彼らのデータがこの条件式において、次のような置き換え（欠損数 δ_ν の現象論的導入）

$$\nu = \frac{2 \text{次元調和振動周期}}{1 \text{次元ケプラー周期}} \rightarrow \nu - \delta_\nu$$

によりすべてうまく説明できることを示した。第1表に $\nu = 1, 2, \dots, 7$ に対し δ_ν の計算値（数値積分された軌道の EBK 量子化から得られる $\Delta \varepsilon_\nu$ を近似式 I に合わせるフィット）と実験値との比較を示す。 $\Delta \varepsilon_\nu$ の逆数である T_ν^{th}/T_c が整数値 ν からのはずれを示している。

第 1 表

(文献2より)

ν	$\Delta \varepsilon_\nu^0$ EBK	$\Delta \varepsilon_\nu$ fit	δ_ν^{ex}	δ_ν fit	T_ν^{th}/T_c
1	1.50	1.50	0.34	—	0.67
2	0.64	0.66	0.43	0.48	1.57
3	0.39	0.39	0.42	0.45	2.58
4	0.28	0.28	0.40	0.43	3.59
5	0.22	0.22	0.38	0.41	4.60
6	0.18	0.18	0.39	0.39	5.61
7	0.15	0.15	0.34	0.38	6.62

 ν : 共鳴タイプ($\nu = 1$ は Galton-Tomkins line) $\Delta \varepsilon_\nu^0$: 数値積分軌道の量子化より得られた $E = 0$ での spacing $\Delta \varepsilon_\nu$ (fit) : 近似式 $(\nu - \delta_\nu)^{-1} \hbar \omega_c$ δ_ν^{ex} : $E = 0$ での ν -タイプ実験値 δ_ν (fit) : ベスト・フィットを与える δ_ν

従って、理論的立場からはこの欠損数を合理的に導くモデルが問われているわけである。以下にその一つの可能性を議論する。

共鳴条件式 I は ρ -平面上の ν 回の振動が z -軸の運動から独立であるとして得たものであるからこれに対する補正が必要である。その補正を次のように行う。

- (A) ν -回の振動に対する作用積分に対し、原点 ($\rho = 0, z = 0$) にもっとも近い最初の一回をクーロン効果を取り入れて行い、残りの $\nu - 1$ 回を上と同じ近似 ($\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \sim \frac{1}{|z|}$) に

従って行う。

- (B) クーロン効果を取り入れた作用積分を実行する場合、ケプラー運動に固有なレンツ・ベクトルの z -成分が運動の定数であると仮定する。

この仮定(B)については説明が必要であるが、詳細は文献4に譲る。レンツ・ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$ を用いて古典ケプラー運動の近似積分を作り反磁性ケプラー運動を量子化することは弱磁場領域において成功している。その結果、正確な二次ゼーマン・スペクトルの定式化と数値結果が得られている⁵⁾ $E \sim 0$ 附近のカオティック・スペクトルに対してはこれもそのままでは役に立たないのであるが、recurrent 軌道群に対してレンツ・ベクトルの z -成分が近似的保存量になっているのではないか、というのがここでのスペキュレーションである。

以上の(A)(B)を仮定すると、作用積分(ここでは n を J と書く)と E との関係を簡単化した式は

$$J r^{1/3} = (\nu - 1) E r^{-2/3} + J_1 r^{1/3} + \frac{1}{2} (J_z r^{1/3} + \Delta) + J_z r^{1/3} \quad (22)$$

のように変更される。(22)右辺の $J_1 r^{1/3}$ は第一回目の振動に対するクーロン補正の入った作用積分を意味し、同じく右辺下段の式はそのための z -方向の運動に関する作用積分補正である。

J_1 と Δ の定式化の詳細は省略するが、これより「欠損数」の入った周期 T_ν (サイクロトロン周期 T_c を単位とし、 $E = 0$ を考える) の式

$$T_\nu = \nu - 1 + \left(2\phi'_\nu(1) + \frac{1}{3} \phi_\nu(1) \right) \quad \left(\phi'(u) = \frac{d}{du} \phi(u) \right) \quad (23)$$

が得られる。第1表の最後に引用した「欠損」値 0.67, 0.57, ... が $2\phi'_\nu(1) + \frac{1}{3} \phi_\nu(1)$ によって与えられることになるのである。すなわち

$$\delta_\nu = 1 - \left(2\phi'_\nu(1) + \frac{1}{3} \phi_\nu(1) \right) \quad (24)$$

ここで $\phi(u)$ は J_1 の計算に必要な一つの関数であるが、その変数 u はエネルギー E に対応して $u = 1$ が $E = 0$ であることがわかっている。また、 $\phi(u)$ はレンツ・ベクトルの z 成分をパラメタとして含み、そのパラメタを λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) とすると λ の異なる値により $\nu = 1, 2, \dots$ が定められる:

$$\phi(u, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} (P^+(x, u, \lambda) + P^-(x, u, \lambda)) dx \quad (25)$$

$$P^\pm(x, u, \lambda) = \left[\frac{1}{2x} \{ a(x, u) \pm \sqrt{a(x, u)^2 - \lambda} \} \right]^{1/2}$$

(積分は $P^+ + P^-$ が x の二価関数の分枝が一点する点 $a = \sqrt{\lambda}$ まで行う。) 数値積分の結果, λ を横軸に取った $\Phi(1, \lambda)$ および $(2\Phi' + \frac{1}{3}\Phi)(1, \lambda)$ をプロットすることにより, δ_ν が $0.3 < \lambda < 0.6$ の範囲ではほぼ第 1 表の値に相当して取れることがわかった。

以上のモデルの真疑性を確認するためには何よりもレンツ・ベクトルの近似的保存性を数値積分軌道について直接確かめることが先決である。

文 献

- 1) J. Main, G. Wiebusch, A. Holle and K. H. Welge: Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2789
- 2) J. Main, A. Holle, G. Wiebusch and K. H. Welge: Z. Phys. D 6 (1987) 295
- 3) 例えば解説 長谷川洋, 戸田幹人, 固体物理 19 (1984) 375.
- 4) H. Hasegawa: in *Fundamental Aspects of Quantum Theory* (ed. Gorini and Frigerio) Plenum Publishing Corp (1986) 193.
- 5) H. Hasegawa and S. Adachi: J. Phys. Soc. Japan (1988) 1 月号.

3. Quantal Version of Resonance Overlapping

京大・理 戸 田 幹 人

京大・基研 池 田 研 介

Chirikov によれば, 位相空間で resonance が重なる時に, 大域的カオスが発生する。これに対応して, 量子論で何が起こるかを次のハミルトニアンをモデルに調べた。

$$H = \frac{I^2}{2} + V \cos \theta + V \cos (\theta - \omega t) \quad (1)$$

(1) による古典力学のストロボ写像を Fig. 1 に示す。ここで resonance の接近の程度を表わすパラメータ

$$S \equiv \frac{4 \sqrt{V}}{\omega} \quad (2)$$

を導入した。 H は周期 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ で周期的であるから, 量子論において任意の波動関数 ϕ の時間